

Vázquez, P. N., y Ramírez, M. M. O. (2016). La evaluación de la integración de las TIC en la educación superior: fundamento para una metodología. *Revista de Educación a Distancia*, (48).

Weller, K. (2010). *Knowledge representation in the social semantic web*. Walter de Gruyter.

CB-577

ACTIVIDADES SOBRE DISTRIBUCIONES MUESTRALES EN EL BACHILLERATO MEXICANO

Eleazar Silvestre Castro¹–María Magdalena Gea²–Ernesto Sánchez¹
eleazar.silvestre@gmail.com–mmgea@ugr.es – esanchez@cinvestav.mx
¹CINVESTAV-IPN, México; ²Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: Comunicación Breve (CB).

Nivel educativo: Bachillerato (16 a 18 años).

Palabras clave: Distribución muestral, trayectoria hipotética de aprendizaje, bachillerato.

Resumen

Se presenta un conjunto de actividades didácticas como parte de una trayectoria hipotética de aprendizaje que hacen uso del software Fathom. En ellas se abordan tres aspectos relacionados a la distribución muestral: la estimación de probabilidades en una distribución binomial (a través de la Ley de los Grandes Números); un acercamiento intuitivo al Teorema del Límite Central; y la noción de valores típicos y atípicos. Se describen de forma general los componentes de las actividades y se brindan algunas reflexiones y sugerencias para la enseñanza en torno a este tipo de actividades y contenido estadístico.

Introducción: contexto y objetivo

A menudo se identifica a la *distribución muestral* como un objeto clave en el estudio de la *inferencia estadística*, ya que este es asumido como un primer modelo sobre el cual se realizan predicciones respecto al comportamiento hipotético de una muestra que será tomada de la población bajo estudio. Al igual que en muchos países, la reciente incorporación de contenido estocástico al currículum escolar pre-universitario (Cuevas, 2012), ha puesto de manifiesto un cúmulo de problemas en la enseñanza y aprendizaje relacionados a este concepto. Por ejemplo, Harradine, Batanero & Rossman (2011) mencionan la presencia de *heurísticas* y *sesgos* (tales como la heurística de la representatividad o la Ley de los Números

Pequeños), inclusive después de la enseñanza, cuando resolvemos situaciones problemáticas de estimación e incertidumbre donde interviene el proceso de muestreo. Saldanha & Thompson (2002) señalan múltiples dificultades en el razonamiento de estudiantes de bachillerato al tratar de coordinar distintos niveles de complejidad implicados en la distribución muestral (la distribución del estadístico en la población, la distribución de una muestra en particular, y la distribución muestral). Chance, delMas & Garfield (2004) describen que, si bien el trabajo con applets interactivos que involucran simulaciones aleatorias hace más tangible el proceso de muestreo y permite identificar relaciones importantes en la distribución muestral (como el efecto del tamaño de muestra), los estudiantes no son capaces de identificar las causas u orígenes de estas relaciones, ni proponer distribuciones muestrales plausibles para un cierto tamaño de muestra. En general, estos autores señalan que las principales causas de estos errores y conflictos son principalmente: 1) una pobre o deficiente comprensión de conceptos claves relacionados a la distribución muestral (por ejemplo, las nociones de variabilidad muestral, distribución y modelos de probabilidad); 2) el excesivo énfasis de prácticas educativas tradicionalistas hacia cálculos y procedimientos, que además se introducen bajo un *enfoque formal* (uso de modelos teórico-probabilísticos antes que simulaciones o experiencias reales con fenómenos aleatorios); y 3) la combinación de estos factores, pues produce que, a lo más, los estudiantes sólo sean capaces de reproducir cálculos y procedimientos carentes de sentido y significado, generando además una alta dependencia a concepciones e intuiciones que usualmente son erróneas.

En México se vive esta problemática, ya que sólo un número muy reducido de sistemas escolares han introducido este tipo de contenido estadístico a la educación básica y, además, se lleva a cabo bajo el enfoque mencionado, tal como es el caso del principal sub-sistema de bachillerato incorporado a la UNAM, el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH, 2003).

A raíz del enorme desarrollo de recursos tecnológicos diseñados para auxiliar el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos estadísticos y probabilísticos (Biehler, Ben-Zvi, Bakker & Makar; 2013), propuestas como la de Rossman (2008) y la de Batanero & Díaz (2015), enmarcadas en la actual corriente de gran interés denominada “inferencia informal”, utilizan la simulación en el estudio de la distribución muestral y su estimación empírica, tanto para mejorar la comprensión de este tipo de objetos estadísticos, como para favorecer el acercamiento a la inferencia. Es en este contexto en el cual se inserta nuestra propuesta de

actividades, por lo que el objetivo de esta comunicación es presentar tres tareas, como parte de una trayectoria hipotética de aprendizaje, que buscan fortalecer la comprensión de algunas ideas estadísticas fundamentales asociadas a la distribución muestral, así como la vinculación entre el uso de modelos probabilísticos formales, y su representación y empleo a través de simulaciones aleatorias computarizadas. En particular, las actividades abordan la estimación de probabilidades en una distribución binomial a través de la Ley de los Grandes Números; un acercamiento intuitivo al Teorema del Límite Central; y la noción de valores típicos y atípicos; todo esto apoyado en el uso del software *Fathom*.

Marco conceptual

Con base en la propuesta de Miles y Huberman (1994), y en reconocimiento de la gran complejidad involucrada en el estudio y análisis de procesos de instrucción matemática, en este reporte se utiliza un marco conceptual que integra diferentes ideas, entendido como una red de categorías o conceptos clave, que se relacionan entre sí, y que explican el fenómeno de estudio. En este sentido se definen las siguientes categorías:

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Simon & Tzur (2004) proponen esta herramienta como un vehículo y modelo de planificación e investigación de la enseñanza y aprendizaje, el cual está compuesto por un conjunto de objetivos de aprendizaje, tareas o actividades matemáticas diseñadas para la emergencia de los objetos matemáticos de interés, y las *hipótesis del proceso de aprendizaje* como una predicción idealizada del razonamiento del aprendiz al realizar las actividades. Ya que a menudo durante la realización de las tareas se transita por ideas consideradas como correctas/apropiadas y parcialmente correctas, en este trabajo nos referimos a las *hipótesis del proceso de razonamiento* en sustitución de las *hipótesis de aprendizaje*.

Razonamiento. Apoyados en la propuesta de Ball & Bass (2003), se interpreta el razonamiento (matemático) como un proceso de desarrollo de argumentos o líneas de pensamiento que pueden tener distintos propósitos (convencer/justificar una proposición, resolver un problema, etc.), donde se identifican pasos/etapas/acciones, relacionadas entre sí, que se trata de vínculos “razonados” o motivos por los cuales una acción específica está seguida de otra.

Ideas estadísticas fundamentales. Burril & Biehler (2011) sugieren que para comprender y utilizar apropiadamente las distintas herramientas y conceptos estadísticos, es necesario

robustecer la adquisición de un conjunto de ideas estadísticas fundamentales asociadas a: *datos, gráficos, variabilidad aleatoria, distribución, asociación y correlación, probabilidad, muestreo e inferencia*. Dado que el concepto de la distribución muestral se relaciona estrechamente con varias de estas ideas (por ejemplo, distribución, variabilidad aleatoria, muestreo e inferencia), se considera que las actividades aquí presentadas pueden incidir directamente en su mejor comprensión.

Descripción general de la trayectoria

Las actividades forman parte de una trayectoria en construcción, en la que se aborda el estudio de las distribuciones muestrales en el bachillerato mexicano bajo el esquema de un experimento de diseño (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble; 2003). Para el diseño de las actividades se han tomado algunos resultados de exploraciones previas con versiones similares de dichas tareas (García & Sánchez, 2015; Silvestre & Sánchez, 2016 y 2017). La trayectoria está dirigida a estudiantes que han iniciado un curso de Estadística y Probabilidad II en el bachillerato; y las actividades no necesariamente deben aplicarse en un orden continuo, ya que el hacerlo depende del momento en el que se hayan atendido los conocimientos previos de cada una. Por restricciones de espacio, se describen brevemente los principales aspectos de cada actividad en términos de los componentes de la trayectoria (ver Anexo para los ítems de las tareas).

Objetivo de aprendizaje de la actividad 1: Que el estudiante comprenda que la probabilidad de un valor particular de la variable aleatoria en una distribución binomial, puede estimarse por el límite de la frecuencia relativa de dicho valor, a medida que aumenta el número de ensayos/muestras/experimentos.

Sobre la actividad 1: La actividad posee un contexto extra-matemático, en donde se utiliza un modelo de urna (*Don Frijol*, Figura 1) cuya composición es conocida para el estudiante desde un inicio ($p = .5$ y $q = .5$). A partir del cálculo de la probabilidad del evento “obtener 3 frijoles pintos en una muestra aleatoria de 4 frijoles tomada con reposición”, mediante la función de probabilidad binomial [$P(x=3) = (C_{4,3})(.5)^4 = .25$)], se guía al estudiante en la utilización de Fathom para construir una distribución binomial empírica, en donde se dirige su atención hacia la frecuencia relativa del valor 3 conforme aumenta el número de ensayos [ítems b)-d)]. La idea general detrás de esta actividad es la estimación de la probabilidad del evento mencionado a través del esquema del muestreo repetido y vista como un límite; en

donde el software provee la posibilidad de realizar un acercamiento intuitivo a la Ley de los Grandes Números (Figura 1), la cual brinda gradualmente una estabilidad a la distribución conforme aumenta el número de ensayos/muestras.

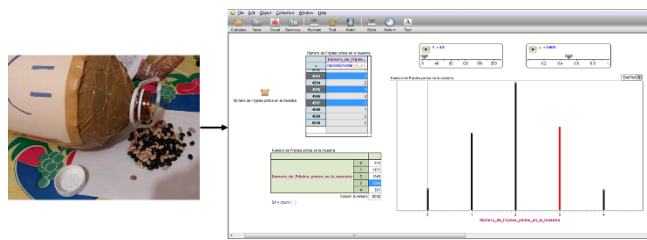


Figura 1. Don Frijol y sus frijoles (izquierda), distribución muestral empírica de 5,000 muestras (derecha)

Sobre las hipótesis de razonamiento: Se esperan razonamientos semejantes a: i) para el ítem a), los estudiantes utilizarán la función de probabilidad binomial para calcular la probabilidad solicitada; ii) para el ítem b), registrarán una o más frecuencias relativas utilizando el software; iii) para los ítems c) y d), identificarán y describirán que la frecuencia relativa presenta variaciones alrededor del .25, pero éstas se reducen conforme el número de ensayos/muestras aumenta; iv) para el ítem e), propondrán calcular la probabilidad solicitada a través de ambos métodos: mediante la función de probabilidad binomial (ajustando $n = 10$ y $x = 4$), o a través del simulador (ajustando $n = 10$) y aumentando el número de ensayos/muestras para observar la convergencia de la frecuencia relativa del valor 4.

Objetivos de aprendizaje de la actividad 2: Que el estudiante comprenda que: 1) la variabilidad de la distribución muestral disminuye cuando aumenta el tamaño de la muestra (n); y 2) la distribución binomial converge a una distribución normal conforme aumentamos el tamaño de muestra (n).

Sobre la actividad 2: Utilizando el mismo contexto, se parte de una distribución muestral empírica y binomial construida con 10,000 proporciones muestrales ($p = .5$) en muestras de tamaño n frijoles. Esta colección no pequeña brinda una estabilidad a la distribución que simula el trabajo directo con su versión teórica. La tarea se divide en dos momentos; en el primero (2.1), se solicita al estudiante aumentar o disminuir n para que observe y describa la reducción de variabilidad que se produce en la distribución, así como el cambio que se produce en su forma (Figura 2). Nótese que se ha realiza un estudio diferente al de la actividad 1 pues se cambia la variable aleatoria de estudio por la proporción muestral; además, se

agrega el valor de la desviación estándar de la distribución, que cambia automáticamente conforme se hace variar n .

Para el segundo momento (2.2), se utiliza otro simulador y se retoma la variable aleatoria de la actividad 1; en este caso se pretende que el estudiante observe y describa que el modelo de la distribución binomial, y la normal de parámetros $N(np, \sqrt{np(1-p)})$, se aproximan gráfica y progresivamente cuando aumenta el tamaño de muestra (Figura 2). Así, se busca que las conclusiones de ambas tareas resulten en la emergencia de proposiciones clave involucradas en el Teorema del Límite Central.

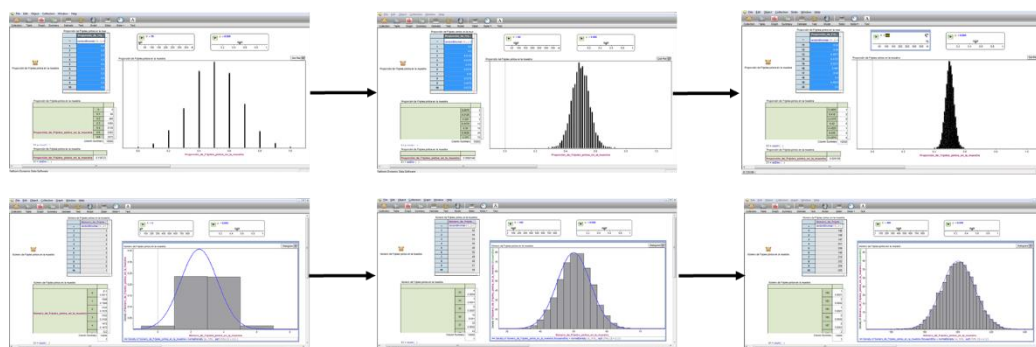


Figura 2. Reducción de la variabilidad en la distribución con $n = 10, 80$ y 400 respectivamente (superior);
ajuste entre la distribución binomial y la normal con $n = 5, 100$ y 400 respectivamente (inferior)

Sobre las hipótesis de razonamiento: Se esperan razonamientos semejantes a: i) para los ítems a) y b), los estudiantes identificarán y describirán que la variabilidad del estimador se reduce cuando aumenta el tamaño de muestra (brindarán argumentos gráficos y con base en el cambio de la desviación estándar de la distribución); para el ítem c), argumentarán que la distribución binomial se ajusta mejor a la distribución normal cuando el tamaño de muestra crece; para el ítem d), identificarán y mencionarán la reducción de la variabilidad y el ajuste de la binomial a la normal como consecuencia del aumento de n ; para el ítem e), propondrán el tamaño máximo de muestra (100), argumentando que con este tamaño se reduce la variabilidad del estimador, y se gana así mayor confianza en la estimación (reducción del error muestral).

Objetivos de aprendizaje de la actividad 3: Que el estudiante: 1) comprenda que las proporciones muestrales con mayor frecuencia relativa son consideradas como resultados típicos de obtener en el proceso de muestreo (aquellas con menor frecuencia relativa son considerados como atípicas); 2) desarrolle un criterio preciso para determinar cuándo una

proporción muestral debe ser considerada típica/atípica (tanto alta como baja) en relación a cierto tamaño de muestra.

Sobre la actividad 3: La actividad está planeada para aplicarla en el momento previo a la introducción del contraste de hipótesis sobre una proporción. La idea que se persigue es la asimilación de la noción de valor típico/atípico en un contexto estocástico-frecuentista. Cuando se trabaja con el contraste de hipótesis bajo la lógica de Fisher, interesa valorar si un resultado muestral particular (o más extremo) es típico/atípico de obtener fijando un cierto *nivel de significación* y suponiendo la hipótesis nula como verdadera, como una forma de rechazar dicha hipótesis. En el enfoque de Neyman y Pearson, interesa elegir una de dos hipótesis como la más plausible, en donde se compara la probabilidad de obtener un valor muestral (o más extremo: *p-valor*) con el nivel de significación previamente establecido. Consideramos importante relacionar el muestreo y la inferencia comenzando por cómo se puede determinar si un valor muestral es típico/atípico, ya que abre la posibilidad de introducir parte de la lógica que se sigue en el proceso de cualquiera de las dos aproximaciones al contraste. Para esto se incluyen cuestionamientos sobre la noción de valor típico/atípico según el contraste de dos colas en el ítem a) y una cola en los ítems b) y c). Así, esta actividad promueve que el estudiante tenga un acercamiento intuitivo a la noción de nivel de significación (Figura 3).

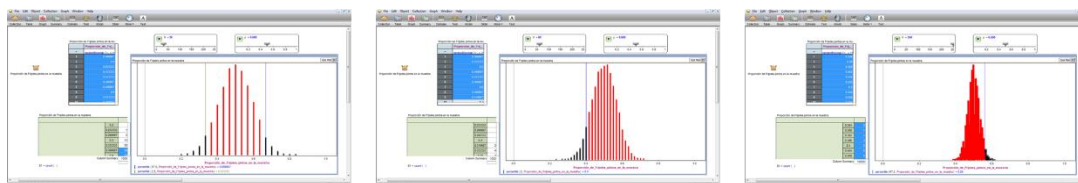


Figura 3. Distribuciones muestrales de Don Frijol con $n = 30, 60$ y 250 respectivamente, con un nivel de significación de $.05$ según regiones de interés (valores típicos en general, pequeños o grandes)

Sobre las hipótesis de razonamiento: Se esperan razonamientos semejantes a: i) para todos los ítems, los estudiantes tomarán como referencia las alta/bajas frecuencias de las proporciones muestrales para clasificarlas como típica/atípicas de obtener (sin declarar explícitamente qué es una “alta/baja” frecuencia); ii) a partir de la discusión, propondrán tomar un valor específico de las proporciones muestrales a partir del cual las proporciones restantes tienen frecuencias acumuladas demasiado bajas (acercamiento a la noción del nivel de significación).

Conclusiones y discusión

Es importante reconocer que, a diferencia de prácticas de enseñanza tradicionalista, el tratamiento de objetos estadísticos tan complejos, como es el caso de la distribución muestral, requiere que los estudiantes cuenten con suficientes momentos y recursos instruccionales en el aula para exhibir, explorar y reorientar sus intuiciones y conocimientos hacia un razonamiento más apropiado. Se sugiere asumir la propuesta de actividades de este trabajo, no tanto como el mejor y único camino para la adquisición de conocimiento, sino como una apuesta prometedora a la generación de situaciones didácticas que promuevan la reflexión, discusión e institucionalización de los objetos estadísticos de interés. Si bien se pretende hacer más asequibles algunas ideas estadísticas fundamentales, sigue siendo necesaria una especial atención y cuidado por parte del profesor en el correcto uso y comprensión de la relación entre modelos probabilísticos y su versión correspondiente en el enfoque estocástico-frecuentista. Así, ya que esta propuesta forma parte de una investigación en curso, actualmente se trabaja en la mejora e implementación de esta trayectoria, para obtener nueva evidencia empírica que ayude tanto a comprender mejor el razonamiento de los estudiantes ante estas tareas, así como para precisar, ampliar y refinar los componentes de la trayectoria misma.

Referencias bibliográficas

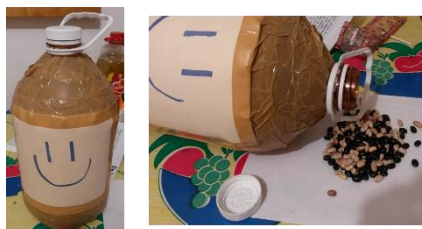
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Batanero C. & Díaz C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2*, (pp. 207-214). Granada, 2015.
- Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A. & Makar, K. (2013). Technologies for enhancing statistical reasoning at the school level. En M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt & J. Kilpatrick (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-688). Springer Science+Business Media, New York.
- Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69). New York: Springer.
- CCH (2003). *Programa de estudios de estadística y probabilidad I y II*. México, UNAM.
- Chance, B., delMas, R. C., & Garfield, J. (2004). Reasoning About Sampling Distributions. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy*,

- reasoning and thinking* (pp. 295-323). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble L. (2003). The role of design in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Cuevas, J., H., (2012). Panorama actual de los estándares educativos en estocástica. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 12(2). México.
- García V. N. & Sánchez E. (2015). Dificultades en el razonamiento inferencial intuitivo. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2* (pp. 207-214). Granada: 2015.
- Harradine, A., Batanero, C. & Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School-Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 235- 246). A Joint ICMI/IASE Study.
- Miles, M. & Huberman, A. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis* (2ªed.). Lóndres: Sage Publications.
- Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19.
- Saldanha, L., y Thompson, P. (2002) Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 257-270.
- Silvestre, E. y Sánchez, E. (2016). Patrones en el desarrollo del razonamiento inferencial informal: introducción a las pruebas de significancia en el bachillerato. En *Memorias del XX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM XX)*, Málaga, España, 2016.
- Silvestre, E. y Sánchez, E. (2017). High school students' first experiences with the Sampling Distribution: toward a distributive perspective of sampling and inference. En *Proceedings del 10th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME-10)*, Dublín, Irlanda, 2017.
- Simon M., &Tzur R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory, *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91 – 104.

Anexo: Hojas de trabajo para los estudiantes (ítems de las tareas)

Actividad 1: Analizando los frijoles de Don Frijol

Don Frijol está constituido por 17,000 frijoles, de los cuales el 50% son pintos y el restante 50% son negros. Responde lo siguiente:



- a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 frijoles pintos en una muestra aleatoria de 4 frijoles tomada con reposición?
- b) Utilizando el archivo de Fathom *DonFrijol_LeyGNum* y con la asesoría del profesor, completa la siguiente tabla:

Número de frijoles pintos en la muestra	Frecuencia relativa			
	Colección de 100 muestras	Colección de 1,000 muestras	Colección de 5,000 muestras	Colección de ...
0				...
1				
2				
3				
4				

- c) ¿Qué relación observas entre la probabilidad obtenida en a) y la frecuencia relativa del valor 3?
- d) ¿Qué sucedería con la frecuencia relativa del valor 3, si se continúa aumentando el número de ensayos/muestras, supóngase hasta 10,000? ¿Y hasta 500,000 ensayos/muestras?
- e) ¿Qué probabilidad asignarías al evento “obtener 4 frijoles pintos en una muestra aleatoria de 10 frijoles tomada con reposición”?

Actividad 2: Analizando los frijoles de Don Frijol (continuación)

2.1. Continuando con el análisis de la toma de muestras de Don Frijol, y con la ayuda de tu profesor, abre el archivo *DonFrijol_TeoLimCen 1* y responde lo siguiente:

- a) Utiliza el deslizador en la parte superior del simulador para aumentar o disminuir el tamaño de muestra, N ; ¿qué sucede con la distribución muestral del estimador “proporción de frijoles pintos en la muestra” conforme aumenta el tamaño de muestra? ¿Qué sucede con la distribución cuando N disminuye?

- b) Realiza una propuesta gráfica que refleje este comportamiento.

2.2. Utiliza ahora el archivo *DonFrijol_TeoLimCen 2* y con la ayuda del profesor introduce en la gráfica la expresión “*normalDensity (x, N*p, sqrt(N*p(1-p)))*”. A partir de la información mostrada por el simulador, contesta lo siguiente:

- c) ¿Qué sucede con ambas distribuciones/modelos (binomial y normal), cuando aumenta el tamaño de muestra?
- d) Con base en esta actividad y la 2.1, ¿qué puede concluirse sobre la distribución muestral cuando se modifica el tamaño de muestra?
- e) Para analizar el porcentaje de frijoles pintos que componen a *Doña Frijol*, la esposa de Don Frijol, se ha decidido tomar una sola muestra (con repetición), de entre 10 y 100 frijoles. ¿Qué tamaño de muestra consideras pertinente para realizar esta estimación? Argumenta ampliamente tu respuesta.

Actividad 3: Identificando resultados típicos y atípicos en Don Frijol

Abre el archivo *DonFrijol_Valorestípicos*. En este simulador se presentan 10,000 proporciones muestrales de frijoles pintos, provenientes de muestras aleatorias (tomadas con repetición), de N cantidad de frijoles cada una. A partir de este simulador, responde a lo siguiente y argumenta ampliamente tu respuesta en cada caso:

- a) Se ha tomado una muestra de 30 frijoles. ¿Cuáles proporciones muestrales consideras típicas de obtener? ¿Cuáles consideras atípicas?
- b) Se ha tomado una muestra de 60 frijoles, ¿Qué proporciones muestrales consideras como atípicamente pequeñas?
- c) Se ha tomado una muestra de 250 frijoles y se obtuvo una proporción muestral de .65; ¿puede considerarse esta proporción como típica o atípicamente grande?